

非厄米系统对称性与拓扑分类研究进展

李冠良, 赵宇军*

华南理工大学物理与光电学院, 广州 510640

摘要: 近年来, 非厄米系统的研究突破了传统量子力学中厄米算符的框架, 揭示了复数本征值与非厄米对称性所蕴含的新的物理规律。相较于厄米体系, 非厄米系统通过复本征值的实-虚二元结构实现了对动力学演化的统一描述, 并涌现出临界点、非正交本征态等新概念和非厄米趋肤效应等独特现象。这些特性源于其哈密顿量的非厄米性, 如伪厄米性对实数谱的约束、Jordan 块结构的代数-几何重数分离, 以及广义布里渊区理论对体边关联的重构。Hatano-Nelson 模型和非厄米 Su-Schrieffer-Heeger 模型展示了非互易跃迁与复能谱的拓扑响应, 为理解非厄米趋肤效应和能带奇异性提供了范例。在对称性与拓扑分类方面, 非厄米系统扩展了传统 Altland-Zirnbauer 十重分类, 形成 Bernard-LeClair 38 类对称框架, 涵盖伪厄米性、手性对称性及复共轭/转置操作的组合效应。拓扑分类通过 K 理论和同伦理论双轨推进, 前者将非厄米系统映射至厄米框架, 后者则解析能带复流形的连续形变特性。未来研究需攻克高维系统普适理论、晶体对称性对分类的影响及实验平台实现等挑战, 推动非厄米拓扑理论在开放量子系统、非平衡态物理和新型器件设计中的应用。

关键词: 非厄米系统; 伪厄米性; Hatano-Nelson 模型; 非厄米 SSH 模型; 对称性; 拓扑相

中图分类号: O66

文献标识码: A

DOI: 10.13725/j.cnki.pip.2025.05.001

目 录	量		218
I. 引言	209	附录 B 开放边界条件下 HN 模型能谱推导	218
II. 非厄米系统的基础理论与模型	210	参考文献	219
A. 本征态双正交化理论	210		
B. 伪厄米性的实谱约束机制	211		
C. 非厄米简并的拓扑表征	211		
1. 非厄米系统的代数结构	211		
2. 动量空间中的简并点分类	211		
D. 非厄米系统经典模型	212		
1. HN 模型	212		
2. 非厄米 SSH 模型	212		
3. HN 模型与伪厄米性	213		
III. 对称性框架的拓扑分类体系	213		
A. 厄米系统: AZ 十重分类	213		
B. 非厄米扩展: Bernard-LeClair 38 类	214		
C. 对称性保护的拓扑相: 定义与判据	215		
D. 弱拓扑和同伦理论	216		
E. 非厄米趋肤效应与广义布里渊区理论	216		
IV. 总结	217		

附录 A 具有正定 η 的伪厄米哈密顿量转化为厄米哈密顿

收稿日期: 2025-01-06
* E-mail: zhaoyj@scut.edu.cn

文章编号: 1000-0542(2025)05-0209-14

209

I. 引言

在量子力学的传统框架中, 我们通常假设作用在波函数上的算符具有厄米性, 这意味着这些算符的本征值是实数, 能够代表可能的物理测量结果。然而, 随着时间的推移, 人们开始关注那些服从 \mathcal{PT} 对称性 (parity-time symmetry) 的非厄米算符, 因为这些算符在某些条件下可能具有实数本征值^[1-2], 但通过严格数学证明表明 \mathcal{PT} 对称性并不要求本征值必须是实数, 当系统的本征态 \mathcal{PT} 对称性破缺时, 实数本征值会分裂成一对共轭的复数^[3]。 \mathcal{PT} 对称性在光学领域的引入^[4]和实验验证^[5], 特别是其中增益和损耗的完美平衡特性^[6-7], 进一步推动了对非厄米算符的研究兴趣。

早期的研究多聚焦于具有实数本征值的非厄米算符, 但非厄米系统的核心特征在于允许复数本征值的存在, 尽管传统理论曾认为复数本征值仅反映系统的不稳

定性^[8]，如机械系统中的摩擦^[9]、电路系统中的电阻损耗^[10]，未充分关注深层次的物理意义。但近年研究表明^[11-12]复数本征值蕴含更丰富的物理内涵，非厄米算符为许多非保守系统提供了有效的物理描述。在有限生命粒子系统中，通过复数能量本征值 $E = \varepsilon - i\gamma$ ($\gamma > 0$) 可以直观表征其动力学特性，实部 ε 对应粒子的准静态能量，类似于经典系统中的能级，决定量子态的震荡频率，而 $\tau = 1/\gamma$ 用于量化粒子的剩余寿命，表示粒子正以指数率 $e^{-\gamma t}$ 衰减^[13]。在波动系统中，复传播常数 $\kappa = \alpha + i\beta$ 的实部 α 对应相位累积速率，虚部 β 则直接衡量能量吸收率和放大率^[14]，在典型的非厄米声学^[15]和光学^[16-18]系统中， β 可以分别调控为以损耗 ($\beta < 0$) 和增益 ($\beta > 0$) 的动力学行为。在共振系统中，复数本征频率 $\omega = \omega_r - i\Gamma/2$ 的实部 ω_r 表征共振峰的中心频率，而虚部 $\Gamma/2$ 决定共振线宽，倒数 $1/\Gamma$ 对应能量在谐振腔内的平均存储时间，通过非厄米理论可直接关联共振频率响应与能量耗散/增益过程，避免了传统厄米体系需额外引入唯象阻尼项的局限性^[19-20]。这些案例表明，非厄米算符通过复本征值的实-虚二元结构，实现了对系统本征特性与动态演化的统一描述。

此外，非厄米系统展现出区别于厄米体系的独特数学特征，如本征态的非正交性^[12]，复能谱的临界点^[21]，以及由此发展出的非厄米能带理论^[22-23]和广义布里渊区等新的数学工具。这些数学性质导致了许多独特的现象，而没有厄米系统的理论和实验上的对应物。如非厄米趋肤效应^[24] (non-Hermitian skin effect, NHSE) 以及对边界条件的高度敏感性。这些现象的出现推动了对非厄米系统深层次理解的探索，并促进了新的理论框架和实验技术的发展。

在凝聚态物理领域，对拓扑相的研究一直是一个核心问题。在传统厄米体系中，研究者们主要关注于 Chern 绝缘体^[25]、拓扑绝缘体^[26-27]等拓扑相的研究。而在非厄米体系中，拓扑相的分类问题变得更为复杂，用恰当的拓扑不变量表征不同的拓扑相是其中的重点。非厄米体系中拓扑相的研究是凝聚态物理研究的前沿领域。在处理非厄米系统拓扑相分类问题中，传统基于 K 理论的分类框架已被广泛应用，这种方法可以非常便利的引入非厄米系统，而基于同伦理论^[28-30]发展的分类方法也引起了学者们的关注。

非厄米系统的这些独特数学特征——从本征态的非正交性、能谱临界点的代数-几何多重分离，到广义布里渊区理论重构的体边对应关系——不仅揭示了与厄米体系截然不同的物理图景，更催生了全新的理论框架。尤为突出的是，非厄米趋肤效应的发现彻底颠覆了传统体边对应原理，其本征态的指数局域化特性与边界

条件的极端敏感性，成为理解非厄米拓扑物态的关键突破口。然而，当前研究仍面临对称性分类体系碎片化、高维拓扑响应机制模糊等核心挑战。本文聚焦非厄米系统对称性与拓扑分类的理论进展，系统梳理复数本征值的物理内涵、伪厄米性约束机制及临界点拓扑表征，剖析 Hatano-Nelson (HN) 和非厄米 Su-Schrieffer-Heeger (SSH) 模型的范式意义，并深入探讨 Bernard-LeClair 分类框架与 K 理论/同伦理论双轨并行的拓扑分类范式，旨在为非厄米拓扑物态的普适理论构建提供结构化视角。

II. 非厄米系统的基础理论与模型

非厄米系统的独特性质源于其哈密顿量的非厄米性，这导致了一系列超越传统厄米量子力学框架的新颖现象。本节系统阐述非厄米物理的核心理论工具^[12]与典型模型，重点关注对称性约束下的拓扑分类机制与非厄米趋肤效应的深层联系。

A. 本征态双正交化理论

对于一般非厄米哈密顿量 H ，我们需要考虑一对左本征态和右本征态 $|\psi_n^{R/L}\rangle$ ，它们分别满足以下本征方程：

$$H|\psi_n^R\rangle = E_n|\psi_n^R\rangle, \quad H^\dagger|\psi_n^L\rangle = E_n^*|\psi_n^L\rangle. \quad (1)$$

其中， E_n 和 E_n^* 是对应的本征值， n 是用于区分本征值的指标， H^\dagger 是 H 的厄米共轭。对于一般的非厄米哈密顿量，除非存在特殊对称性，其本征值通常为复数。进一步假设左本征态和右本征态分别是线性独立的，此时可以对其进行双正交化 (bi-orthogonalized)^[31] 处理：

$$|\tilde{\psi}_n^R\rangle = \frac{|\psi_n^R\rangle}{\sqrt{\langle\psi_n^L|\psi_n^R\rangle}}, \quad |\tilde{\psi}_n^L\rangle = \frac{|\psi_n^L\rangle}{\sqrt{\langle\psi_n^L|\psi_n^R\rangle}}. \quad (2)$$

经过验证，双正交化后的本征态满足以下正交性质：

$$\langle\tilde{\psi}_n^L|\tilde{\psi}_m^R\rangle = \delta_{nm}, \quad \sum_n |\tilde{\psi}_n^R\rangle\langle\tilde{\psi}_n^L| = 1. \quad (3)$$

为简化后续表述，本文假定所有左本征态和右本征态均已双正交化，省略波浪号标记。

非厄米系统的左右本征态和双正交化特征，展现出与传统厄米系统截然不同的物理内涵。这种双正交性基础会引发一系列反直觉现象，如光功率的周期性振荡^[32]、关联函数的传播速度可能突破传统因果律的限制^[33]、甚至在人工神经网络设计中，双正交基底的选

择可显著增强循环神经网络的动力学表达能力^[34]。这些现象本质上源于非厄米系统中量子态概率守恒律的破缺，以及左右本征态间的非互易耦合特性。值得注意的是，当系统参数接近临界点时，双正交性将展现出更为深刻的物理意义，这将在后续章节进行讨论。

B. 伪厄米性的实谱约束机制

对于具有实数本征值的哈密顿量 H ，并非一定是厄米的，此类系统可通过引入伪厄米性概念进行刻画^[3,35-36]。即存在一个可逆算符 η ，使得 H 满足广义厄米条件：

$$\eta^{-1}H^\dagger\eta = H, \quad (4)$$

此时对应的左、右本征态可以通过 η 相互转换，若 $H|\psi_R\rangle = E|\psi_R\rangle$ ，则左本征态 $\langle\psi_L|$ 满足 $\langle\psi_L| = \langle\psi_R|\eta$ 。进一步的，通过 η 可以定义伪内积：

$$\langle\psi|\phi\rangle_\eta = \langle\psi|\eta|\phi\rangle, \quad (5)$$

因此 η 常常称为伪度量算符。值得注意的是，满足条件的 η 算符并不是唯一的， $\eta' = \eta H$ 亦满足式 (4) 的条件。当 η 正定时，系统可通过相似变换约化为传统厄米形式。具体而言，对 η 奇异值分解 (附录 A) $\eta = S^\dagger S$ ，可以构造一个等效的厄米哈密顿量 $\tilde{H} = SHS^{-1}$ ，因此，伪厄米性理论的核心研究对象为不定度规情形 (即 η 非正定)，此类系统无法通过相似变换映射至厄米哈密顿量，但仍可能保持实数谱性质^[12]。这一特性为开放量子系统、 \mathcal{PT} 对称量子力学等非厄米体系提供了理论框架。

C. 非厄米简并的拓扑表征

1. 非厄米系统的代数结构

在量子力学中，研究哈密顿量谱的核心问题之一是分析其本征值的分布特性。当将哈密顿量表述为 $N \times N$ 的复矩阵时，根据代数学基本定理，其本征多项式可以写作 $P(E) = \prod_{j=1}^m (E - E_j)^{m_a^{(j)}}$ ，其中 E_j 是互不相等的本征值， $m_a^{(j)}$ 是本征值 E_j 的代数重数对任意的本征值 E_j ，它的几何重数 $m_g^{(j)}$ 定义为线性无关的右本征态的数量，满足 $(H - E_j I)|\psi_{j\alpha}^R\rangle = 0$ ， $\alpha = 1, \dots, m_g^{(j)}$ 。

厄米的哈密顿量有许多特殊性质：所有的本征值都是实数；对任意的本征值，几何重数始终等于代数重数；本征态具有正交完备性 $\langle\psi_{j\alpha}^L|\psi_{k\beta}^R\rangle = \delta_{jk}\delta_{\alpha\beta}$ ，因此可以完全对角化。非厄米哈密顿量则打破上述性质。特别地，

几何重数可能严格小于代数重数 ($m_g^{(j)} < m_a^{(j)}$)，这意味着 H 无法对角化，需要借助 Jordan 块来表征其结构，也就是块对角化，通过相似变换可将任意非厄米哈密顿量转化为 Jordan 块的直和形式：

$$H = V \left[\bigoplus_{j=1}^J \bigoplus_{\alpha=1}^{m_g^{(j)}} J_{n_{j\alpha}}(E_j) \right] V^{-1}, \quad (6)$$

其中 $J_n(E_j)$ 是本征值为 E_j 的 n 阶 Jordan 块：

$$J_n(E_j) = \begin{bmatrix} E_j & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & E_j & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_j & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & E_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & E_j \end{bmatrix}_{n \times n},$$

这里 E_j 对应的 Jordan 块的个数 $m_g^{(j)}$ 即是几何重数，代数重数为 Jordan 块阶数之和 $m_a^{(j)} = \sum_{\alpha=1}^{m_g^{(j)}} n_{j\alpha}$ 。块对角化揭示非厄米系统的核心特征，当 $m_g^{(j)} < m_a^{(j)}$ 时，系统出现非对角简并，此时至少有一个 Jordan 块的阶数满足 $n_{j\alpha} \geq 2$ ，这种结构将主导哈密顿量参数空间中临界点的拓扑性质。

2. 动量空间中的简并点分类

理解块对角化、几何重数和代数重数的概念之后，我们将在动量空间 $k \in \text{BZ}$ (Brillouin zone) 考虑哈密顿量族 $H(k)$ 的能带结构。首先给出两种简并点的类型：存在邻域 $U(k_0)$ ，对于所有 $k \in U(k_0) \setminus k_0$ ，哈密顿量族 $H(k)$ 可对角化，且 $m_g^{(j)}(k_0) = m_a^{(j)}(k_0) \geq 2$ ，此时， k_0 被称为常规简并点 (diaboloic points, DP)。此类点对应本征值的简并，但无伴随的代数奇异性 (如分支点)，且 $H(k_0)$ 仍可对角化。在厄米系统中，此类简并点普遍存在 (如石墨烯的狄拉克点)。

若 $H(k_0)$ 含有阶数 $n \geq 2$ 的 Jordan 块 (即 $m_g^{(j)}(k_0) < m_a^{(j)}(k_0)$)，则 k_0 被称为临界点。此时， $H(k_0)$ 的本征值和对应的本征态在 k_0 处发生合并，即对应的右本征态 $|\psi_n^R\rangle$ 和 $|\psi_m^R\rangle$ 存在复数 c_1, c_2 使得 $c_1|\psi_n^R\rangle + c_2|\psi_m^R\rangle = 0$ ，此外其能谱在邻域内呈现代数奇异性，如 $(k - k_0)^{1/n}$ 型的分支行为。

例如，非厄米二能级模型 $H(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{bmatrix}$ 在 $k = 0$ 处出现二阶临界点，其本征值为 $E(k) = \pm k^{1/2}$ ，即能谱的平方根奇异性，其本征态为 $|\psi_{\pm}^R\rangle \propto (1, \pm\sqrt{k})^T$ 在 $k = 0$ 处合并，明确展示非厄米系统的特性。临界点是

非厄米系统的标志性特征，其拓扑性质可由环绕该点的绕数表征 (winding number) [37]。

当这些简并点扩展为参数空间中的连续曲线或闭合环时，系统将出现临界链 (exceptional chain) 或临界环 (exceptional ring) 结构 [11]。此类高维临界流形的存在显著增强了非厄米系统的拓扑分类复杂性，其稳定性由对称性及 Jordan 块维度共同决定。值得注意的是，这些高维临界流形与临界点处的本征态融合现象、非厄米趋肤效应之间存在着深刻的相互作用，而它们在拓扑相变过程中的协同演化机制尚未完全阐明，这构成了当前研究的核心挑战 [38]。

D. 非厄米系统经典模型

非厄米系统有许多经典的模型，其中 HN 模型 [39] 和非厄米 SSH 模型 [40-41] 尤为典型。

1. HN 模型

HN 模型描述了在一维链上具有非互易跃迁的非厄米系统，其哈密顿量可以表示为：

$$H = \sum_n (t_R c_{n+1}^\dagger c_n + t_L c_n^\dagger c_{n+1}). \quad (7)$$

$t_R \neq t_L$ ，表示向右与向左的不对称跃迁。这个哈密顿量写成矩阵形式可以很方便地区分周期性边界条件 (periodic boundary condition, PBC) 和开放边界条件 (open boundary condition, OBC)：

$$H = \begin{bmatrix} 0 & t_L & 0 & \cdots \\ t_R & 0 & t_L & \cdots \\ 0 & t_R & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

不妨假设 HN 模型的哈密顿量的矩阵形式是 N 阶的，则周期性边界条件要求 $H_{1,N} = t_R$ ， $H_{N,1} = t_L$ ；而开放边界条件要求 $H_{1,N} = 0$ ， $H_{N,1} = 0$ 。在周期性边界条件下，利用布洛赫定理 (Bloch's theorem) 和傅里叶变换 (Fourier transform)，假设波函数为： $\psi_n = e^{ikn}$ ，则哈密顿量作用在波函数上得到能量色散关系：

$$E(k) = t_R e^{ik} + t_L e^{-ik}, \quad (8)$$

这个复能谱在复平面上是一个椭圆，见图 1(c)。

在开放边界条件下，通过引入广义的波函数 (附录 B)，系统的有效动量需要扩展至复平面，得到当 $t_R > 0$ 、

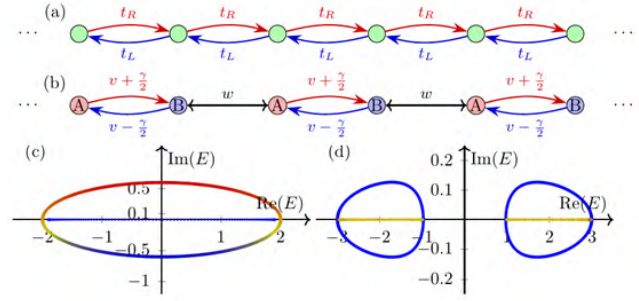


图 1. (a) HN 模型的示意图，展示了非对称的跃迁强度。(b) 非厄米 SSH 模型，包含两个子格点 A 和 B，子格点内部具有非对称跃迁强度 $\nu \pm \gamma/2$ ，而子格点之间的跃迁强度为 w 。(c) HN 模型在 PBC 和 OBC 下的复平面能谱分布 ($t_R = 0.7$ ， $t_L = 1.3$)，PBC 能谱显示为椭圆形封闭曲线，而 OBC 能谱显示为实轴上的离散点。(d) HN 模型在 PBC 和 OBC 下的复平面能谱分布 ($\nu = 2$ ， $w = 1$ ， $\gamma = 0.5$)，PBC 能谱显示为两个鸡蛋形曲线，而 OBC 能谱显示为曲线中的离散点。

$t_L > 0$ 时，能谱退化为实轴上离散的线段：

$$E(\theta) = 2\sqrt{t_R t_L} \cos \theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi). \quad (9)$$

当 t_L 为负值时，需要考虑相应的相位因子，但总体形式类似。因此，能量谱在广义布里渊区 (generalized Brillouin zone, GBZ) 上是关于 θ 的函数，在连续极限条件下可以视为连续值。对比式 (7)，体态 (具有周期性边界条件) 的 HN 模型的能谱落在复平面的椭圆上，而边界态 (具有开放边界条件) 的 HN 模型的能谱是实轴上的一条线段上。

2. 非厄米 SSH 模型

SSH 模型最初定义为一维紧束缚模型，用于描述聚乙炔等一维二聚化链的电子结构。其晶体结构为每个原胞包含两个原子位点 (A 和 B)，形成交替的跃迁强度。最初 SSH 模型是厄米的，其哈密顿量为：

$$H = \sum_{n=1}^N [\nu c_{n,A}^\dagger c_{n,B} + w c_{n,B}^\dagger c_{n+1,A} + \text{h.c.}], \quad (10)$$

其中 ν 是原胞内 A 到 B 的跃迁强度， w 是原胞间 B 到下一个原胞 A 的跃迁强度，h.c. 表示厄米共轭项。非厄米性通过破坏哈密顿量的厄米性引入，常见方法包括：非互易跃迁 [41]、复跃迁参数以及虚数势能。以非互易跃迁参数为例 (图 1(b))，非厄米 SSH 模型的哈密顿量表示为：

$$H = \sum_n \left[\left(\nu + \frac{\gamma}{2} \right) c_{n,A}^\dagger c_{n,B} + \left(\nu - \frac{\gamma}{2} \right) c_{n,B}^\dagger c_{n,A} + w c_{n,B}^\dagger c_{n+1,A} + \text{h.c.} \right], \quad (11)$$

通过傅里叶变换转化为 Bloch 哈密顿量:

$$H(k) = d_x(k)\sigma_x + \left(d_y(k) + i\frac{\gamma}{2}\right)\sigma_y, \quad (12)$$

其中 $d_x(k) = \nu + w \cos k$, $d_y(k) = w \sin k$ 。根据该哈密顿量容易得到

$$E(k) = \pm \sqrt{d_x^2(k) + \left(d_y(k) + i\frac{\gamma}{2}\right)^2}. \quad (13)$$

此复能谱在 PBC 下形成闭合环状结构, 而在 OBC 下则退化为弧状分支, 展现出典型的非厄米趋肤效应 (图 1(d))。

3. HN 模型与伪厄米性

根据 II.B 节的讨论, 如果非厄米的哈密顿量具有伪厄米性, 且伪度量算符 η 正定, 则该哈密顿量可以具有实数的本征值。基于对称性分析, HN 模型在开放边界条件与周期性边界条件下的谱特性差异可归因于其伪厄米性的显式破缺。

对于 OBC 条件下的 HN 模型, 其伪厄米性可通过构造特定伪度量算符 $\eta = S^\dagger S$ 实现, 其中 $S = \text{diag}(1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^{N-1})$, 而 $\beta = \sqrt{t_L/t_R}$ 。此算符的物理意义在于引入非均匀规范变换: 对第 n 个格点波函数施加权重因子 β^n , 将原非厄米系统映射为等效的厄米系统, S 的指数衰减权重有效补偿了非互易跃迁强度。

伪度量算符 η 的正定性由 S 对角元全为正且非简并所保证。当 η 正定时, 哈密顿量 H 的全体本征值必为实数。此结论与 OBC 下 HN 模型的数值结果一致 (参见式 (9))。通过规范变换后的哈密顿量 $\tilde{H} = SHS^{-1}$, 严格满足厄米性条件。该映射揭示了一个重要机制: 非厄米系统的奇异体边响应可被特定的伪厄米结构所“隐藏”, 表现为等效厄米系统的常规量子行为。

本发现为构建非厄米拓扑相的统一分类框架提供了新思路。在正定伪度量算符下, 系统的拓扑不变量可直接从等效厄米哈密顿量 \tilde{H} 导出, 其陈数等拓扑指标与原始非厄米系统具有对应关系。特别地, 边界态的出现可由伪厄米变换下拓扑平凡-非平凡相的突变解释, 这为理解 NHSE 的拓扑起源提供了理论依据。

III. 对称性框架的拓扑分类体系

一个世纪前, Landau 提出的 Landau-Ginzburg 范式, 认为不同的相和不同的对称性有关, 对称性的变化导致了相变的发生^[42], 这是对拓扑相的最初理解。然而, 量

子霍尔效应^[26]的发现对这一理论框架提出了挑战。这一突破性的实验结果揭示了一个新的相变范畴, 其中相变可以在完全保持系统对称性不变的情况下发生, 这种相变与系统的拓扑不变量紧密相关。

A. 厄米系统: AZ 十重分类

1997 年 Altland 和 Zirnbauer (AZ) 首先在随机矩阵理论^[43]的背景下基于三种非空间对称性提出了十种对称类^[44-45]。在这十种对称类的约束下, 每个空间维度有五种对称类具有非平凡的拓扑相, 三个对称类以整数 (\mathbb{Z}) 拓扑不变量表征, 两个对称类以二元 (\mathbb{Z}_2) 拓扑不变量表征^[46-48], 这种分类与对称类和空间维度呈现出周期性。这些分类使用了几种不同的分类方法: 包括无间隙边界态对扰动的稳定性分析^[46]、Dirac 哈密顿量表示的降维^[47]、K 理论和 Clifford 代数^[48]。其中, K 理论与 Clifford 代数的协同框架因具有普适性和数学严格性, 现已成为该领域的主流研究范式。

根据操作特性, 对称性可分为空间对称性和非空间对称性。空间对称性是由点群/空间群描述的晶体对称操作 (如旋转 C_n 、镜面 M), 详见文献^[49-50]。厄米系统的非空间对称性受时间反演对称性 (time reversal symmetry, TRS): $TH(k)T^{-1} = H(-k)$, $TT^* = \pm I$; 粒子空穴对称性 (particle hole symmetry, PHS): $CH(k)C^{-1} = -H(-k)$, $CC^* = \pm I$ 和手性对称性 (chiral symmetry, CS): $SH(k)S^{-1} = -H(k)$ 支配。

厄米系统的非空间对称性对于哈密顿量的限制总是可以写成下面形式:

$$H = \epsilon U \chi(H) U^\dagger, \quad (14)$$

其中 $\epsilon = \pm 1$, U 是幺正算符, $\chi(H)$ 恒等变换 (P) 或者复共轭变换 (K)。当 $U = k$ 时, $UU^* = \eta_K I$, 其中 $\eta_K = \pm 1$ 。转置变换和复共轭变换是等价的, 在式 (6) 两端同时进行转置共轭变换, 就可以从其中一种形式转化为另外一种形式。当 $\chi(H)$ 是复共轭变换, 且 $\epsilon = 1$ 时, 就是 TRS; 而当 $\chi(H)$ 是复共轭变换, 且 $\epsilon = -1$ 时, 就是 PHS。考虑 TRS 和 PHS 的组合, 总共十种情况, 由此得出了 Altland-Zirnbauer (AZ) 十重分类^[48], 具体分类结果参见表 I。

近年来, 该分类体系被进一步推广, Teo 等在原有动量空间维度的基础上引入了位置空间维度, 讨论了拓扑缺陷对 Bott-Kitaev 周期表的影响^[51]。Chiu 等和 Morimoto 等引入了额外的反幺正对称性 (如反射), 发现新对称性的加入改变了对称类, 并导致 Bott 周期表发生平移^[52-53]。这些发展为拓扑物态的分类提供了更普适

表 I. Bott-Kitaev 周期表。\$d\$ 是空间维度，最左边一列 (A, AIII, ..., CI) 表示哈密顿量的十个对称类，其特征是存在或不存在时间反转 (T)、粒子空穴 (C) 和手性 (S) 不同类型的对称性由 \$\pm\$ 表示。条目 \$\mathbb{Z}\$、\$\mathbb{Z}_2\$、\$2\mathbb{Z}\$ 和 0 表示存在或不存在非平凡的拓扑相，并且当它们存在，这些态的类型。

类	T	C	S	\$d\$							
				0	1	2	3	4	5	6	7
A	0	0	0	\$\mathbb{Z}\$	0	\$\mathbb{Z}\$	0	\$\mathbb{Z}\$	0	\$\mathbb{Z}\$	0
AIII	0	0	1	0	\$\mathbb{Z}\$	0	\$\mathbb{Z}\$	0	\$\mathbb{Z}\$	0	\$\mathbb{Z}\$
AI	+	0	0	\$\mathbb{Z}\$	0	0	0	\$2\mathbb{Z}\$	0	\$\mathbb{Z}_2\$	\$\mathbb{Z}_2\$
BDI	+	+	1	\$\mathbb{Z}_2\$	\$\mathbb{Z}\$	0	0	0	\$2\mathbb{Z}\$	0	\$\mathbb{Z}_2\$
D	0	+	0	\$\mathbb{Z}_2\$	\$\mathbb{Z}_2\$	\$\mathbb{Z}\$	0	0	0	\$2\mathbb{Z}\$	0
DIII	-	+	1	0	\$\mathbb{Z}_2\$	\$\mathbb{Z}_2\$	\$\mathbb{Z}\$	0	0	0	\$2\mathbb{Z}\$
AII	-	0	0	\$2\mathbb{Z}\$	0	\$\mathbb{Z}_2\$	\$\mathbb{Z}_2\$	\$\mathbb{Z}\$	0	0	0
CII	-	-	1	0	\$2\mathbb{Z}\$	0	\$\mathbb{Z}_2\$	\$\mathbb{Z}_2\$	\$\mathbb{Z}\$	0	0
C	0	-	0	0	0	\$2\mathbb{Z}\$	0	\$\mathbb{Z}_2\$	\$\mathbb{Z}_2\$	\$\mathbb{Z}\$	0
CI	+	-	1	0	0	0	\$2\mathbb{Z}\$	0	\$\mathbb{Z}_2\$	\$\mathbb{Z}_2\$	\$\mathbb{Z}\$

的理论框架^[54]。

B. 非厄米扩展：Bernard-LeClair 38 类

Bernard 与 LeClair 于 2002 年通过引入广义对称性算符，首次将 Altland-Zirnbauer (AZ) 的随机矩阵理论框架拓展至非厄米系统^[55]。与厄米情形不同，非厄米哈密顿量因不满足厄米性条件 \$H = H^\dagger\$，其对称分类问题呈现出更高的复杂性。式 (14) 中的对称约束算符 \$\chi(H)\$ 可扩展为恒等变换 (\$P\$)，转置变换 (\$C\$)，复共轭变换 (\$K\$)，和厄米共轭变换 (\$Q\$) 中的一种。值得注意的是，这些变换对应的么正算符 \$U\$ 需满足严格代数关系，对于恒等变换和转置共轭，只需要连续两次利用式 (14)，可得 \$[U^2, H] = 0\$，这意味着我们总是可以选择恰当的相位因子，使得 \$U^2 = I\$。而对于转置变换和复共轭变换，则需要满足 \$UU^* = I\$。基于 Bloch 哈密顿量的对称性约束可表述为：

$$\begin{aligned}
 P : H(k) &= -PH(k)P^\dagger, & P^2 &= I; \\
 Q : H(k) &= \epsilon_Q QH^\dagger(k)Q^\dagger, & Q^2 &= I; \\
 C : H(k) &= \epsilon_C PH^T(-k)C^\dagger, & CC^* &= \eta_C I; \\
 K : H(k) &= \epsilon_K KH^*(-k)k^\dagger, & kk^* &= \eta_K I.
 \end{aligned} \tag{15}$$

\$C\$ 和 \$K\$ 对称性中波数 \$k\$ 取负号源于转置/共轭操作与空间反演/时间反演的关联性。此类算符的组合关系导致对称类数目增至 38 种^[56]，远超厄米体系的 AZ 十重分类，称为 Bernard-LeClair (BL) 分类。

早期研究尝试直接移植厄米分类框架至非厄米系统。Gong 等^[57]通过约束标准 AZ 类至非厄米情形，将对称类数量从 10 种缩减至 7 种，但该方法因忽略 BL 分类中算符组合的多样性而具有局限性。这一矛盾的根

源在于：非厄米系统中 CS 与亚晶格对称性 (sublattice symmetry, SLS) 的等效性被破坏^[58]，当系统存在非互易跃迁时，\$P\$ 对称性仅约束格点间耦合，而 CS 要求全局 \$H \to -H\$ 变换，二者不再兼容。除此之外，非厄米系统需同时考虑复共轭型与转置型对称性，此时式 (15) 中的 \$C\$ 对称性可以进一步细化为 \$PHS\$，\$TRS^\dagger\$，\$K\$ 对称性可以进一步细化为 \$TRS\$，\$PHS^\dagger\$。对于 \$Q\$ 对称性，当 \$\epsilon_Q = 1\$ 时，正是 II.B 节提到的伪厄米性，该对称性在非厄米系统中具有特殊地位。而对于 \$\epsilon_Q = -1\$，才是非厄米系统中的手性对称性。

近期研究通过引入广义 Clifford 代数，将 BL 对称类与能隙条件统一于 K 理论框架，并基于点间隙或线间隙提出非厄米系统的周期表，包括有能隙^[59-60]和无能隙的情况^[61-62]。这一分类源于复能谱的几何特性。

在复平面上，点隙相要求存在复平面的参考点 \$E_0 \in \mathbb{C}\$，使得所有的复能谱 \$E(k)\$ 满足 \$|E(k) - E_0| > 0\$。而线隙相则要求复能谱 \$E(k)\$ 与特定的参考线 (如实轴或虚轴) 无交点。

在厄米系统中，有能隙的厄米哈密顿量总是可以通过某种连续变换得到本征值都为 \$\pm 1\$ 的哈密顿量，这个过程称为展平。关于厄米系统中展平的研究已经非常成熟^[48]，厄米和非厄米系统中能谱的展平过程可以参考图 2。而对于非厄米的点隙相，首先是通过么正展平将哈密顿量转化为么正哈密顿量。但此时的哈密顿量并不是厄米的，因此再将非厄米哈密顿量转化为厄米哈密顿量，形式如下：

$$\tilde{H}(k) = \begin{bmatrix} 0 & H(k) \\ H^\dagger(k) & 0 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

这个哈密顿量的厄米性很容易验证，并且经过转换的哈

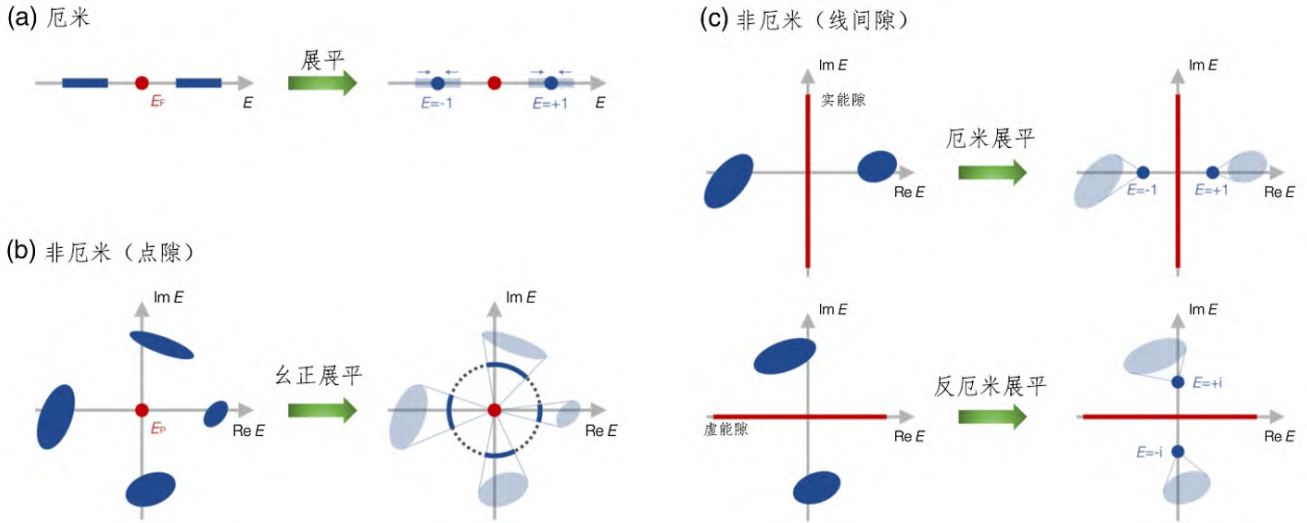


图 2. 厄米和非厄米系统中能谱的展平过程。(a) 有能隙的厄米哈密顿量的展平。一个厄米哈密顿量可以展平为另一个具有 $H^2 = I$ 性质的厄米哈密顿量，而无需闭合能隙。(b) 具有点间隙的非厄米哈密顿量的幺正展平。非厄米哈密顿量可以展平为具有 $H^\dagger H = I$ 性质的幺正哈密顿量，而无需闭合点能隙。(c) 具有线间隙的非厄米哈密顿量的厄米展平。在存在实数(虚数)间隙的情况下，非厄米哈密顿量可以展平为厄米(反厄米)哈密顿量，其 $H^2 = I$ ($H^2 = -I$)。图片取自^[59]。

密顿量满足 $\det \tilde{H}(k) \neq 0$ 。这意味着这个新的厄米哈密顿量也是有能隙的。通过这种变换得到的哈密顿量就可以在传统的 K 理论框架下推导出相应的拓扑相^[59]。

与点隙相的转化为厄米哈密顿量的方法相反，线隙相的情况发生了变化。线隙相允许我们将非厄米系统与厄米系统进行类比，并将一些厄米系统中常见的拓扑不变量(如 Chern 数)推广到非厄米系统中。线隙相的系统可以被认为在某种意义上“接近”于厄米系统，因为它们的谱(通过某种变换)在复平面上表现为实数轴的一侧。事实上，非厄米哈密顿量可以在存在实间隙的情况下连续变形为厄米矩阵，在存在虚能隙的情况下可以展平为反厄米矩阵($H = -H^\dagger$)，这使得非厄米哈密顿量的分类问题也简化为厄米哈密顿量的分类问题。我们需要强调在虚能隙的情况下，通过变换 $H \rightarrow iH$ ，反厄米哈密顿量的拓扑性质和实隙下的非厄米哈密顿量是一样的^[63]。

尽管 BL 分类提供了理论框架，38 种对称类中仍有部分缺乏明确的物理实现，其拓扑响应机制尚待探索。而对于分类问题的进一步研究，可以考虑晶体对称性(如螺旋/镜面对称性)能否对 BL 类进行子类划分，从而简化分类体系。近期研究在点隙体系下取得突破——Wang^[64]针对非厄米 AZ 与 AZ^\dagger 类(共 16 类)，系统分类了二阶空间对称性(如镜面对称、二重旋转)对拓扑数的修正效应。研究表明，晶体对称性可诱导分类维度平移(如 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$)或生成非厄米独有拓扑相(如 \mathbb{Z}_4 分类的螺旋趋肤模)。该问题的全面解决需结合空间群理论与非厄米拓扑的耦合效应，是未来理论研究的重

要方向。

C. 对称性保护的拓扑相：定义与判据

在凝聚态物理的拓扑分类框架中，对称性约束与拓扑相的等价性判据构成理论体系的基石。本节基于代数拓扑的方法，系统阐述其数学定义与物理内涵。

对于给定的空间维度为 d 的量子系统，对称类(symmetry class)定义为满足特定对称性组合的哈密顿量：

$$\mathcal{H}_{\text{sys}} = \{H(k) | \mathcal{O}_i H(k) \mathcal{O}_i^{-1} = f_i(H(k))\}, \quad (17)$$

其中 \mathcal{O}_i 为对称操作算符， f_i 为对应的函数约束，如 $\pm H(k)$ 或 $\pm H^*(k)$ ^[44,55]。两个哈密顿量 $H_0(k)$ 和 $H_1(k)$ 被称为拓扑等价，当且仅当存在连续映射：

$$H_\lambda(k) \in \mathcal{H}_{\text{sys}} \quad (\lambda \in [0, 1]), \quad (18)$$

使得

$$H_{\lambda=0}(k) = H_0(k), \quad H_{\lambda=1}(k) = H_1(k). \quad (19)$$

此等价性判据由 K 理论与同伦论严格定义。

实际物理系统中，拓扑相的稳健性要求演化路径 $H_\lambda(k)$ 不闭合能隙，在厄米系统中表现为需要保持实能隙，即导带和价带在演化过程中没有交叠^[26]。而非厄米系统则表现为需维持点隙和线隙不变。若演化中发生能隙闭合(如通过临界点)，则系统经历拓扑相变，导致初始与末态哈密顿量分属不同拓扑相。

D. 弱拓扑和同伦理论

传统 K 理论分类基于向量丛的稳定等价类，其核心限制在于仅能描述全局拓扑性质（如：陈数 $C_n \in \mathbb{Z}$ ），且许多相关能带结构无法通过参考点或参考线来检测。而 Kennedy 的同伦论方法通过分析能带映射 $H(k) : T^d \rightarrow \mathcal{M}$ 的连续形变特性，构造了更精细的拓扑分类框架^[65-66]。

设分类空间 \mathcal{M} 是满足对称性约束的矩阵流形，系统的拓扑分类由同伦群 $\pi_n(\mathcal{M})$ 表征，对于 d 维的 Brillouin 区，拓扑不变量是

$$\nu \in \pi_d(\mathcal{M}) \otimes \pi_{d-1}(\mathcal{M}) \otimes \cdots \otimes \pi_0(\mathcal{M}). \quad (20)$$

当 $\pi_d(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}_m$ 时，系统呈现出 \mathbb{Z}_m 型弱拓扑相。当考虑稳定极限 $N \rightarrow \infty$ (N 是能带数)， $\pi_d(\mathcal{M})$ 退化为 K 群 $K^{-d}(T^d)$ ^[65]。通过这种同伦论的方法也可以很自然推导出类似的 Bott 周期表^[67]。

基于同伦理论的方法可以很自然的引入非厄米系统，用于区分可分离能带之间的拓扑行为，并得到了本征能谱的编织结构。非厄米系统跟厄米系统的差别仅仅在于分类空间的不同，非厄米系统的分类空间为 $\mathcal{M}_{\text{NH}} = GL(N, \mathbb{C})/U(N)$ 。进一步消除冗余自由度，把分类空间限制为具有非简并谱的 $N \times N$ 的矩阵^[28-29]，此时

$$\mathcal{M}_N \cong \frac{\text{Conf}_N(\mathbb{C}) \times F_N}{S_N}, \quad (21)$$

$\text{Conf}_N(\mathbb{C})$ 是复平面的 N 维有序数组， $F_N \cong GL(N)/\mathbb{C}^{*N}$ 是用于描述线性独立的归一化本征矢空间，也称为旗流形 (flag manifold)， S_N 是置换群，用于消除能带置换带来的冗余自由度。考虑 $d = 1$ 的一维能带结构， $\pi_1(\mathcal{M}_N) = B_N$ ，对应复平面上 N 个能级的编织结构。当能带无交换的缠绕时，用 B_N 群中的单位元描述；当能带发生交换时，对应 B_N 的非平凡元素，导致拓扑保护的纠缠态，图 3 所示是 $N = 2$ 时的能带编织结构。对于 $d \geq 2$ 的拓扑结构则更加复杂，是值得进一步研究的问题。除了分类问题上的应用之外，同伦理论在其他非厄米拓扑问题^[68-71]也发挥了重要作用。

同伦理论还为理解存在临界点的系统提供了更深的见解。Yang 等的研究^[30]利用同伦理论提供了一个系统的分类框架，这不仅揭示 \mathcal{PT} 对称系统中 Abelian 和 non-Abelian 相的存在，而且对简并点的拓扑结构提供了深入的洞见。此外，Li 等^[72]在他们的工作中，使用代数拓扑方法，对非厄米系统中的对称性保护简并点进行了系统的分类和探索，对称性保护的简并点并不是简单消失，而是可能合并成更高阶的简并点。

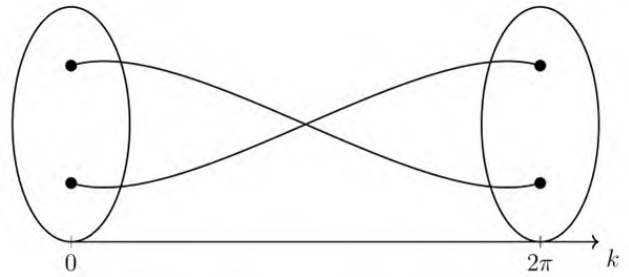


图 3. B_2 能带编织结构。图中显示的圆盘是复能量平面，有两个谱点。 k 是 Bloch 动量， $k = 0$ 和 $k = 2\pi$ 是动量空间中两个等价的点。

同伦理论在非厄米系统分类问题上的应用还处于初步探索阶段，还有许多问题亟待解决。虽然在厄米系统中可以很自然推导出类似的 Bott 周期表。但是在非厄米分类问题上这个问题更为复杂，通过同伦理论推导出 Bernard-LeClair 38 类周期表依旧在探索阶段。除此之外，探索基于编织群 B_N 的非阿贝尔拓扑不变量，例如定义基于能带交换路径的编织绕数，量化不同维度临界点的纠缠强度，也是值得深入研究的方向。

E. 非厄米趋肤效应与广义布里渊区理论

在传统凝聚态物理框架中，Bloch 定理通过将晶格系统的波函数分解为平面波与周期调幅函数的乘积，成功地将周期边界条件下的能带结构约化为 Brillouin 区内的动量空间解析形式。然而，非厄米系统的本征值复化特性与边界敏感性从根本上破坏了这一理论范式。当系统处于开放边界条件时，其能谱和本征态展现出与周期边界条件完全不同的拓扑特征^[22-23]。

为重构非厄米系统的能带理论框架，研究者提出通过解析延拓波矢至复平面 $\tilde{k} = k + i\kappa$ 来定义广义布里渊区^[73]，引入变量替换 $\beta = e^{i\tilde{k}}$ ，其数学形式由非厄米哈密顿量本征多项式的根分布决定：

$$\text{GBZ} = \left\{ \tilde{k} \in \mathbb{C} \mid |\beta_j(\tilde{k})| = |\beta_{j+1}(\tilde{k})| \right\}, \quad (22)$$

其中 $\beta_j(\tilde{k})$ 表示哈密顿量本征方程的解在复平面内的模长相位条件。该理论框架揭示了两个核心结论：其一，OBC 下能谱在复平面内呈现开放的弧状分支结构，而非 PBC 对应的闭合环；其二，系统本征态普遍具有空间指数局域化特征，这一现象被定义为非厄米趋肤效应^[74]。值得强调的是，趋肤效应的存在导致传统体边对应原理的彻底失效，系统拓扑性质的刻画必须依赖于 GBZ 重构的体边对应关系。通过 GBZ 重构的能谱与 PBC 结果存在本质差异，这为理解非厄米系统边界敏感性提供了严格数学基础^[75]。

在此框架下，绕数成为表征拓扑不平凡性的核心不变量，其定义与计算依赖于 GBZ 上的复积分。对于一维非厄米系统的 Bloch 哈密顿量 $H(\tilde{k})$ ，其绕数 W 由下式给出：

$$W = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\text{GBZ}} \frac{d}{d\tilde{k}} \ln \det[H(\tilde{k})] d\tilde{k}, \quad (23)$$

该拓扑不变量量化了 GBZ 路径上哈密顿量行列式相位的累积变化，其非零值直接对应于 OBC 下边界局域态的存在性。 $W \neq 0$ 系统所有本征态呈现单边指数局域化特征，局域方向由绕数符号决定。这一性质在 HN 模型中得到完美诠释，GBZ 表现为以原点为中心、半径为 $r = \sqrt{t_L/t_R}$ 的复平面圆环，跃迁参数的不对称性导致本征态波函数呈现空间非对称衰减，从而在 OBC 下观测到全谱局域化现象。

考虑非厄米 SSH 模型。设 Bloch 波矢延拓为复变量 $\tilde{k} = k + i\kappa$ 对应替换 $\beta = e^{i\tilde{k}}$ 。本征方程需要满足式 (22) 所示条件：

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{\frac{\nu - \frac{\gamma}{2}}{\nu + \frac{\gamma}{2}}} \equiv r, \quad (24)$$

此时 GBZ 定义为：

$$\text{GBZ} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z = \frac{e^{ik}}{r}, \quad k \in [0, 2\pi) \right\}, \quad (25)$$

该复平面圆环取代传统 Brillouin 区，其半径 r 直接表征趋肤模的局域化长度 $\xi = 1/\ln r$ 。通过 GBZ 重构的体边对应关系表明：当系统绕数非零时，OBC 下所有本征态局域于单一边界，局域方向由 $\text{sgn}(\nu - \gamma/2)$ 决定。当参数满足 $\nu^2 - (\gamma/2)^2 < w^2$ 时，系统处于拓扑不平凡相。非厄米性 γ 可调控拓扑相变临界点，拓展了传统 SSH 模型的相图边界。这种拓扑特性已经通过极化理论^[76] 和非平衡格林函数^[77] 的方法得到验证。

尽管 GBZ 框架在低维单带系统中取得成功，但是其高维多带系统中的推广仍然面临挑战^[79]，因其涉及复流形上的多临界点分析。高维空间的几何自由度赋予了 NHSE 更为丰富的表现形式，例如二维系统中的角局域化、三维系统中的铰链或角局域化，以及混合维度局域化模式，这些模式如图 4 所示。这些现象统称为高维非厄米趋肤效应，其核心特征在于本征态波函数在实空间特定几何区域（如晶格角、边棱）的指数局域化，且其局域化维度与系统对称性、非互易性分布密切相关。Zhang 等^[80] 提出定理指出：当非厄米哈密顿量的周期边界能谱覆盖复平面有限区域时，系统将呈现 NHSE。但该定理仅提供现象学判据，缺乏严格的数学形式化。

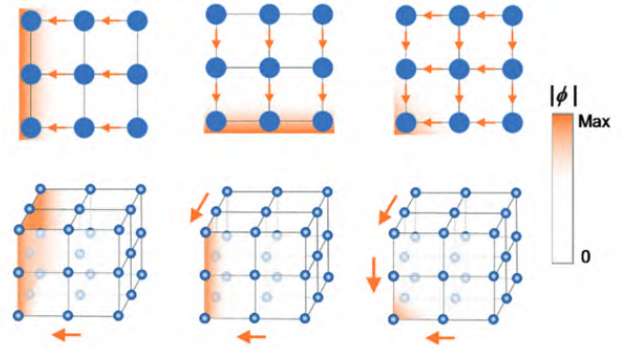


图 4. HN 模型的高维拓展。橙色阴影示意性地表示了趋肤模式的分布。需要注意的是，为了清晰起见，只标明了主要跳跃。图片取自^[78]。

近期研究尝试引入 Wess-Zumino 项等代数拓扑工具解释角趋肤模式^[81]，但此类方法仍局限于特定模型。总体而言，高维 NHSE 的普适理论尚未建立，现有成果多基于个案研究，亟待发展统一框架。

IV. 总结

本文系统综述了非厄米系统对称性与拓扑分类的理论进展，核心结论如下：通过伪厄米性约束、双正交量子力学及 Jordan 块结构分析，揭示了复本征值实-虚二元性对动力学演化的统一描述能力，阐明临界点的代数奇异性与非厄米趋肤效应 (NHSE) 的拓扑起源。基于 Bernard-LeClair 38 类对称性，构建了非厄米系统超越 AZ 十重分类的新范式，阐明伪厄米性、手性对称性与复共轭/转置操作的耦合效应对拓扑相图的调控机制。K 理论通过么正展平将非厄米系统映射至厄米框架，实现陈数等拓扑不变量的继承；而同伦理论通过能带编织结构与复流形分析，揭示 Z_m 型弱拓扑相与临界链的普适分类规则。HN 模型与非厄米 SSH 模型分别作为 NHSE 与能带奇异性的范例，验证了广义布里渊区理论对体边关联的重构能力，为拓扑边界态的主动调控提供理论依据。

当前非厄米拓扑分类主要集中于低维系统（一维链、二维晶格），其理论工具（如广义布里渊区理论、绕数计算）在三维及以上维度面临更多的复杂性。针对 K 理论的分类方案，考虑结合晶体对称性通过投影表示与 BL 对称类耦合，可能导致原有 38 类的进一步分裂，由此发展晶体对称性约束的 Clifford 代数扩张，生成新的代数约束条件。而针对编织结构，提出基于编织群 B_N 的非阿贝尔拓扑不变量，例如定义基于能带交换路径的编织绕数，量化不同维度临界点的纠缠强度，其非阿贝

尔特性可解释混合局域模态的稳定性。除此之外，建立高维 NHSE 的普适理论需突破低维体系的思维定式，如高维复流形与广义布里渊区的重构，高维 NHSE 的拓扑不变量以及对称性保护的 NHSE 局域化，形成可拓展至任意维度的数学物理范式。

虽然理论模型已经预测了许多非厄米拓扑现象，但实验验证仍处于早期阶段。设计和进行实验以在物理系统（例如光子或声学装置）中观察这些现象，对于验证理论预测至关重要。

附录 A 具有正定 η 的伪厄米哈密顿量转化为厄米哈密顿量

如果我们已知一个伪厄米系统正定的伪度量算符 η ，我们可以通过将哈密顿量进行相似变换，将其转化为一个等效的厄米形式。这种方法有助于理解非厄米系统的实本征值结构，并提供一个等效的厄米系统视角。

由于 η 是正定的，我们可以定义一个新的算符 S ，使得 $\eta = S^\dagger S$ 。这样的算符 S 总是可以找到，过程如下：

由于 η 是正定的，可以将其分解为

$$\eta = U\Lambda U^\dagger, \quad (\text{A.1})$$

其中 U 是酉矩阵， Λ 是一个包含 η 的正本征值 Λ_i 的对角矩阵，即 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 。构造一个新的对角矩阵

$$\Lambda^{\frac{1}{2}} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}), \quad (\text{A.2})$$

其中每个对角元素都是原本征值的平方根。定义

$$S = U\Lambda^{\frac{1}{2}}U^\dagger.$$

可以验证 $S^\dagger S = U\Lambda^{\frac{1}{2}}U^\dagger U\Lambda^{\frac{1}{2}}U^\dagger = U\Lambda U^\dagger = \eta$ 。除了本征值分解的方法，也可以采用奇异值分解方法找到满足条件的 S 。

得到 S 之后，我们可以构造一个等效的厄米哈密顿量：

$$\tilde{H} = SHS^{-1}. \quad (\text{A.3})$$

计算 \tilde{H} ：

$$\tilde{H}^\dagger = (SHS^{-1})^\dagger = (S^{-1})^\dagger H^\dagger S^\dagger.$$

利用伪厄米性条件 $H^\dagger = \eta H \eta^{-1}$ ，以及 $\eta = S^\dagger S$ ，可以得到：

$$\tilde{H}^\dagger = (S^{-1})^\dagger \eta H \eta^{-1} S^\dagger.$$

由于 $\eta = S^\dagger S$ ，有 $\eta^{-1} = S^{-1}(S^{-1})^\dagger$ 。代入后得到：

$$\tilde{H}^\dagger = SHS^{-1} = \tilde{H}. \quad (\text{A.4})$$

因此， \tilde{H} 是一个厄米算符。通过这种相似变换，我们将一个伪厄米哈密顿量 H 转换为等效的厄米形式 \tilde{H} 。在新的表示下，系统的本征值和本征态结构可以通过厄米哈密顿量 \tilde{H} 来描述，从而确保本征值为实数。在等效厄米形式下，分析系统的谱和物理性质更加直接，因为 \tilde{H} 满足厄米条件，可以用标准的厄米算符方法进行分析。

附录 B 开放边界条件下 HN 模型能谱推导

在开放边界条件下，Bloch 定理不再适用，需要引入广义的波函数形式： $\psi_n = \beta^n$ ，其中 β 是一个待定的复参数。将哈密顿量作用在该波函数上，代入 $\psi_n = \beta^n$ ，得到 $E\beta^n = t_R\beta^{n+1} + t_L\beta^{n-1}$ ，两边同时除以 β^n 得到 $E = t_R\beta + t_L\beta^{-1}$ 。这是关于 β 的本征方程，连接了能量 E 与复参数 β 。将本征方程整理为关于 β 的二次方程： $t_R\beta^2 - E\beta + t_L = 0$ 。解得：

$$\beta_{\pm} = \frac{E \pm \sqrt{E^2 - 4t_R t_L}}{2t_R}, \quad (\text{B.1})$$

容易验证 $\beta_+ \beta_- = t_L/t_R$ 。

在开链长度为 N 的情况下，波函数需要满足边界条件 $n=0$ 处： $\psi_0 = 0$ ， $n=N+1$ 处： $\psi_{N+1} = 0$ ，假设通解为：

$$\psi_n = A\beta_+^n + B\beta_-^n, \quad (\text{B.2})$$

利用边界条件：

1. 当 $n=0$ 时， $\psi_0 = A + B = 0 \Rightarrow B = -A$ ，
2. 当 $n=N+1$ 时， $\psi_{N+1} = A\beta_+^{N+1} - A\beta_-^{N+1} = 0$ 。因此 $\beta_+^{N+1} = \beta_-^{N+1}$ 。上式可写为：

$$\left(\frac{\beta_+}{\beta_-}\right)^{N+1} = 1 \Rightarrow \frac{\beta_+}{\beta_-} = e^{\frac{i2\pi m}{N+1}}, \quad m = 0, 1, \dots, N. \quad (\text{B.3})$$

由于 $\beta_+ \beta_- = t_L/t_R$ ，且 β_+/β_- 的模为 1，说明 β_+ 和 β_- 的模相同：

$$|\beta_+| = |\beta_-| = \sqrt{\frac{t_L}{t_R}}.$$

由上述分析可知， β 的模为固定值：

$$|\beta| = r, \quad r = \sqrt{\frac{t_L}{t_R}}.$$

这表明 β 的取值落在复平面上以原点为中心、半径为 r 的圆上, β 满足 $\beta = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$ 。将其代入本征方程:

$$\begin{aligned} E &= t_R\beta + t_L\beta^{-1} = t_R(re^{i\theta}) + t_L\left(\frac{1}{re^{i\theta}}\right) \\ &= t_Rre^{i\theta} + \frac{t_L}{r}e^{-i\theta} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

由于 $r = \sqrt{|t_L/t_R|}$, 可以进一步简化, 得到当 $t_R > 0$, $t_L > 0$ 时:

$$E(\theta) = 2\sqrt{t_R t_L} \cos \theta. \quad (\text{B.5})$$

参考文献

- [1] BENDER C M, BOETTCHER S, MEISINGER P N. PT-symmetric quantum mechanics[J]. *J. Math. Phys.*, 1999, 40(5): 2201.
- [2] BENDER C M, BOETTCHER S. Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians having PT symmetry[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1998, 80(24): 5243.
- [3] MOSTAFAZADEH A. Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry: the necessary condition for the reality of the spectrum of a non-hermitian hamiltonian[J]. *J. Math. Phys.*, 2002, 43(1): 205.
- [4] MAKRI S K G, EL-GANAINY R, CHRISTODOULIDES D N, et al. Beam dynamics in pt symmetric optical lattices[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, 100(10): 103904.
- [5] GUO A, SALAMO G J, DUCHESNE D, et al. Observation of PT-symmetry breaking in complex optical potentials[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2009, 103(9): 093902.
- [6] ÖZDEMİR Ş K, ROTTER S, NORI F, et al. Parity-time symmetry and exceptional points in photonics[J]. *Nat. Mater.*, 2019, 18(8): 783.
- [7] EL-GANAINY R, MAKRI S K G, KHAJAVIKHAN M, et al. Non-Hermitian physics and PT symmetry[J]. *Nat. Phys.*, 2018, 14(1): 11.
- [8] MOISEYEV N. Non-Hermitian quantum mechanics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- [9] HUBER S D. Topological mechanics[J]. *Nat. Phys.*, 2016, 12(7): 621.
- [10] LEE C H, IMHOF S, BERGER C, et al. Topoelectrical circuits[J]. *Commun. Phys.*, 2018, 1(1): 39.
- [11] BERGHOLTZ E J, BUDICH J C, KUNST F K. Exceptional topology of non-Hermitian systems[J]. *Rev. Mod. Phys.*, 2021, 93(1): 015005.
- [12] ASHIDA Y, GONG Z, UEDA M. Non-Hermitian physics[J]. *Adv. Phys.*, 2020, 69(3): 249.
- [13] KOZII V, FU L. Non-Hermitian topological theory of finite-lifetime quasiparticles: prediction of bulk Fermi arc due to exceptional point[EB/OL]. [2017-08-19]. <https://arxiv.org/pdf/1708.05841>.
- [14] FENG L, WONG Z J, MA R M, et al. Single-mode laser by parity-time symmetry breaking[J]. *Science*, 2014, 346(6212): 972.
- [15] ACHILLEOS V, THEOCHARIS G, RICHOUX O, et al. Non-Hermitian acoustic metamaterials: role of exceptional points in sound absorption[J]. *Phys. Rev. B*, 2017, 95(14): 144303.
- [16] LU L, JOANNOPOULOS J D, SOLJAČIĆ M. Topological photonics[J]. *Nat. Photonics*, 2014, 8(11): 821.
- [17] FENG L, EL-GANAINY R, GE L. Non-Hermitian photonics based on parity - time symmetry[J]. *Nat. Photonics*, 2017, 11(12): 752.
- [18] OZAWA T, PRICE H M, AMO A, et al. Topological photonics[J]. *Rev. Mod. Phys.*, 2019, 91(1).
- [19] ROTTER I. A non-Hermitian Hamilton operator and the physics of open quantum systems[J]. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2009, 42(15): 153001.
- [20] ELEUCH H, ROTTER I. Resonances in open quantum systems[J]. *Phys. Rev. A*, 2017, 95(2): 022117.
- [21] SAYYAD S, STÅLHAMMAR M, RØDLAND L, et al. Symmetry-protected exceptional and nodal points in non-Hermitian systems[J]. *SciPost Phys.*, 2023, 15(5): 200.
- [22] YAO S, SONG F, WANG Z. Non-Hermitian Chern bands[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2018, 121(13): 136802.
- [23] YOKOMIZO K, MURAKAMI S. Non-Bloch band theory of non-Hermitian systems[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2019, 123(6): 066404.
- [24] HELBIG T, HOFMANN T, IMHOF S, et al. Generalized bulk-boundary correspondence in non-Hermitian topoelectrical circuits[J]. *Nat. Phys.*, 2020, 16(7): 747.
- [25] HALDANE F D M. Model for a Quantum Hall effect without Landau levels: condensed-matter realization of the “parity anomaly”[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1988, 61(18): 2015.
- [26] KANE C L, MELE E J. Quantum spin Hall effect in graphene[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, 95(22): 226801.
- [27] KANE C L, MELE E J. Z_2 topological order and the quantum spin Hall effect[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, 95(14): 146802.
- [28] LI Z, MONG R S K. Homotopical characterization of non-Hermitian band structures[J]. *Phys. Rev. B*, 2021, 103(15): 155129.
- [29] WOJCIK C C, SUN X Q, BZDUŠEK T, et al. Homotopy characterization of non-Hermitian Hamiltonians[J]. *Phys. Rev. B*, 2020, 101(20): 205417.
- [30] YANG K, LI Z, KÖNIG J L K, et al. Homotopy,

- symmetry, and non-Hermitian band topology[J]. *Rep. Prog. Phys.*, 2024, 87(7): 078002.
- [31] BRODY D C. Biorthogonal quantum mechanics[J]. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2014, 47(3): 035305.
- [32] RÜTER C E, MAKRIS K G, EL-GANAINY R, et al. Observation of parity-time symmetry in optics[J]. *Nat. Phys.*, 2010, 6(3): 192.
- [33] ASHIDA Y, UEDA M. Full-counting many-particle dynamics: nonlocal and chiral propagation of correlations[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2018, 120(18): 185301.
- [34] KERG G, GOYETTE K, TOUZEL M P, et al. Non-normal recurrent neural network (nnRNN): learning long time dependencies while improving expressivity with transient dynamics[EB/OL]. [2019-10-28]. <https://arxiv.org/abs/1905.12080>.
- [35] MOSTAFAZADEH A. Pseudo-Hermitian representation of quantum mechanics[J]. *Int. J. Geom. Methods M.*, 2010, 07(07): 1191-1306.
- [36] MELKANI A. Degeneracies and symmetry breaking in pseudo-Hermitian matrices[J]. *Phys. Rev. Res.*, 2023, 5(2): 023035.
- [37] HEISS W D. Exceptional points of non-Hermitian operators[J]. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2004, 37(6): 2455-2464.
- [38] DING K, FANG C, MA G. Non-Hermitian topology and exceptional-point geometries[J]. *Nat. Rev. Phys.*, 2022, 4(12): 745-760.
- [39] HATANO N, NELSON D R. Localization transitions in non-Hermitian quantum mechanics[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, 77(3): 570.
- [40] SU W P, SCHRIEFFER J R, HEEGER A J. Soliton excitations in polyacetylene[J]. *Phys. Rev. B*, 1980, 22(4): 2099.
- [41] YAO S, WANG Z. Edge states and topological invariants of non-Hermitian systems[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2018, 121(8): 086803.
- [42] LANDAU D, LIFSHITZ E M. *Statistical Physics: Volume 5*[M]. New York: ButterworthHeinemann, 2013.
- [43] MEHTA M L. *Random matrices*[M]. Amsterdam San Diego: Elsevier/Academic Press, 2004.
- [44] ALTLAND A, ZIRNBAUER M R. Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures[J]. *Phys. Rev. B*, 1997, 55(2): 1142.
- [45] HEINZNER P, HUCKLEBERRY A, ZIRNBAUER M R. Symmetry classes of disordered fermions[J]. *Commun. Math. Phys.*, 2005, 257(3): 725.
- [46] SCHNYDER A P, RYU S, FURUSAKI A, et al. Classification of topological insulators and superconductors in three spatial dimensions[J]. *Phys. Rev. B*, 2008, 78(19): 195125.
- [47] RYU S, SCHNYDER A P, FURUSAKI A, et al. Topological insulators and superconductors: tenfold way and dimensional hierarchy[J]. *New J. Phys.*, 2010, 12(6): 065010.
- [48] KITAEV A. Periodic table for topological insulators and superconductors[C]. Chernogolokova: AIP Conference Proceedings, 2009.
- [49] CHEN Z J, WANG R, XIA B W, et al. Three-Dimensional Dirac Phonons with Inversion Symmetry[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2021, 126(18): 185301.
- [50] KÖNIG J L K, HERBER F, BERGHOLTZ E J. Nodal phases in non-Hermitian wallpaper crystals[J]. *Appl. Phys. Lett.*, 2024, 124(5): 051109.
- [51] TEO J C Y, KANE C L. Topological defects and gapless modes in insulators and superconductors[J]. *Phys. Rev. B*, 2010, 82(11): 115120.
- [52] CHIU C K, YAO H, RYU S. Classification of topological insulators and superconductors in the presence of reflection symmetry[J]. *Phys. Rev. B*, 2013, 88(7): 075142.
- [53] MORIMOTO T, FURUSAKI A. Topological classification with additional symmetries from Clifford algebras[J]. *Phys. Rev. B*, 2013, 88(12): 125129.
- [54] CHIU C K, TEO J C Y, SCHNYDER A P, et al. Classification of topological quantum matter with symmetries[J]. *Rev. Mod. Phys.*, 2016, 88(3): 035005.
- [55] BERNARD D, LECLAIR A. A classification of 2D random Dirac fermions[J]. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2002, 35(11): 2555-2567.
- [56] BERNARD D, LECLAIR A. A classification of non-Hermitian random matrices[EB/OL]. [2020-02-26]. <https://arxiv.org/abs/cond-mat/0110649>.
- [57] GONG Z, ASHIDA Y, KAWABATA K, et al. Topological phases of non-Hermitian systems[J]. *Phys. Rev. X*, 2018, 8(3): 031079.
- [58] LEE T E. Anomalous edge state in a non-Hermitian lattice[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2016, 116(13): 133903.
- [59] KAWABATA K, SHIOZAKI K, UEDA M, et al. Symmetry and topology in non-Hermitian physics[J]. *Phys. Rev. X*, 2019, 9(4): 041015.
- [60] ZHOU H, LEE J Y. Periodic table for topological bands with non-Hermitian symmetries[J]. *Phys. Rev. B*, 2019, 99(23): 235112.
- [61] KAWABATA K, BESSHO T, SATO M. Classification of exceptional points and non-Hermitian topological semimetals[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2019, 123(6): 066405.
- [62] BUDICH J C, CARLSTRÖM J, KUNST F K, et al. Symmetry-protected nodal phases in non-Hermitian systems[J]. *Phys. Rev. B*, 2019, 99(4): 041406.
- [63] KAWABATA K, HIGASHIKAWA S, GONG Z, et al. Topological unification of time-reversal and particle-hole symmetries in non-Hermitian physics[J]. *Nat.*

- Commun., 2019, 10(1): 297.
- [64] WANG Y. Classifying order-two spatial symmetries in non-Hermitian Hamiltonians: point-gapped AZ and AZ^\dagger Classes[A]. arXiv, 2024.
- [65] KENNEDY R, GUGGENHEIM C. Homotopy theory of strong and weak topological insulators[J]. Phys. Rev. B, 2015, 91(24): 245148.
- [66] WU Q, SOLUYANOV A A, BZDUŠEK T. Non-Abelian band topology in noninteracting metals[J]. Science, 2019, 365(6459): 1273.
- [67] KENNEDY R. Topological Hopf-Chern insulators and the Hopf superconductor[J]. Phys. Rev. B, 2016, 94(3): 035137.
- [68] REN J, SINITSYN N A. Braid group and topological phase transitions in nonequilibrium stochastic dynamics[J]. Phys. Rev. E, 2013, 87(5): 050101.
- [69] WANG K, DUTT A, WOJCIK C C, et al. Topological complex-energy braiding of non-Hermitian bands[J]. Nature, 2021, 598(7879): 59.
- [70] PATIL Y S S, HÖLLER J, HENRY P A, et al. Measuring the knot of non-Hermitian degeneracies and non-commuting braids[J]. Nature, 2022, 607(7918): 271.
- [71] ZHANG Q, LI Y, SUN H, et al. Observation of acoustic non-Hermitian Bloch braids and associated topological phase transitions[J]. Phys. Rev. Lett., 2023, 130(1): 017201.
- [72] LI J Z, BAI K, GUO C, et al. Braiding topology of symmetry-protected degeneracy points in non-Hermitian systems[J]. Phys. Rev. B, 2024, 109(4): L041102.
- [73] KUNST F K, EDVARDSSON E, BUDICH J C, et al. Biorthogonal bulk-boundary correspondence in non-Hermitian systems[J]. Phys. Rev. Lett., 2018, 121(2): 026808.
- [74] TAI T, LEE C H. Zoology of non-Hermitian spectra and their graph topology[J]. Phys. Rev. B, 2023, 107(22): L220301.
- [75] HU Y M, SONG F, WANG Z, et al. Generalized Brillouin zone and non-Hermitian band theory[J]. Acta Phys. Sin., 2021, 70(23): 230307.
- [76] EDVARDSSON E, KUNST F K, YOSHIDA T, et al. Phase transitions and generalized biorthogonal polarization in non-Hermitian systems[J]. Phys. Rev. Res., 2020, 2(4): 043046.
- [77] DENG T S, YI W. Non-Bloch topological invariants in a non-Hermitian domain wall system[J]. Phys. Rev. B, 2019, 100(3): 035102.
- [78] ZHANG X, ZHANG T, LU M H, et al. A review on non-Hermitian skin effect[J]. Adv. Phys.: X, 2022, 7(1): 2109431.
- [79] ZHANG K, YANG Z, FANG C. Correspondence between winding numbers and skin modes in non-Hermitian systems[J]. Phys. Rev. Lett., 2020, 125(12): 126402.
- [80] ZHANG K, YANG Z, FANG C. Universal non-Hermitian skin effect in two and higher dimensions[J]. Nat. Commun., 2022, 13(1): 2496.
- [81] KAWABATA K, SATO M, SHIOZAKI K. Higher-order non-Hermitian skin effect[J]. Phys. Rev. B, 2020, 102(20): 205118.

Advances in symmetry and topological classification of non-Hermitian systems

LI Guanliang , ZHAO Yujun *

School of Physics and Optoelectronics, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China

Abstract: Recent years have witnessed groundbreaking developments in non-Hermitian systems, which transcend the framework of Hermitian operators in conventional quantum mechanics to reveal new physical laws inherent in complex eigenvalues and non-Hermitian symmetries. Unlike Hermitian systems, non-Hermitian systems achieve unified description of dynamical evolution through the real-imaginary dual structure of complex eigenvalues, manifesting unique phenomena including exceptional points, non-orthogonal eigenstates, and the non-Hermitian skin effect (NHSE). These distinctive properties originate from the non-Hermitian nature of their Hamiltonians, such as pseudo-Hermiticity constraining real spectra, the separation of algebraic-geometric multiplicities in Jordan block structures, and the generalized Brillouin zone theory reconstructing bulk-boundary correspondence. Prototypical models like the Hatano-Nelson model and non-Hermitian Su-Schrieffer-Heeger (SSH) model demonstrate nonreciprocal hopping and topological responses in complex energy spectra, providing paradigmatic platforms for understanding NHSE and energy band singularities. In symmetry and topological classification, non-Hermitian systems extend the traditional Altland-Zirnbauer tenfold classification to the 38-fold Bernard-LeClair symmetry classes, encompassing pseudo-Hermiticity, chiral symmetry, and combined conjugation-transposition operations. Topological classification progresses through dual approaches: K-theory mapping to Hermitian frameworks and homotopy theory analyzing deformation characteristics of complex band manifolds. Future challenges involve developing universal theories for high-dimensional systems, elucidating crystalline symmetry impacts on classification, and implementing experimental platforms, ultimately advancing applications in open quantum systems, nonequilibrium physics, and novel device engineering.

Key words: non-Hermitian systems; pseudo-Hermiticity; Hatano-Nelson model; non-Hermitian SSH model; symmetry; topological phase

* E-mail: zhaoyj@scut.edu.cn